Analyse (03/04)
Eerste herhalingstentamen, Vrijdag 27 augustus, 2004
duur: 3 uur.

Lees elk opgave eerst in zijn geheel door. Vermeld de gebruikte stellingen kort en bondig. Een antwoord zonder toelichting, ook al is het antwoord goed, levert geen punten op.

1.[1] Beschouw de functie $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ met $f(0,0) = 0$ en

$$f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

(i)[2] Bewijs met een ε, δ argument dat f continu is in $(0,0)$.
(ii)[2] Bepaal $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ en $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.
(iii)[2] Voor welke richting $u \in \mathbb{R}^2$ met $||u|| = 1$ bestaat de richtingsafgeleide van f in $(0,0)$?
(iv)[1] Is f differenteerbaar in $(0,0)$?
(v) [2] Is $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ continu in $(0,0)$?

2.[1] De onderdelen (a) en (b) zijn onafhankelijk van elkaar.
(a)[4](i) Formuleer de kettingregel voor vector functies van meerdere variabelen.
(ii) Stel $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ worden gefinieerd door

$$f(x,y) = x^2 + y, \quad g(s) = (s^2, e^s).$$

Stel $h = g \circ f$. Bepaal h' via de kettingregel. Controleer je antwoord door differentiatie van de samengestelde functie.
(b)[5] Stel $O = (0,\infty) \times (0,\infty)$ en $U = (0,\infty) \times (0,\infty)$. De functie $f : O \to \mathbb{R}$ is C^1 en voldoet aan

$$2x\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y\frac{\partial f}{\partial y}(x,y).$$

(i) Toon aan dat door $u = xy^2$ en $v = x$ een C^∞-diffeomorfisme $\Phi(x,y) = (u,v)$ gedefinieerd wordt van O op U.
(ii) Beschouw de functie $g(u,v) = f \circ \Phi^{-1}(u,v)$, toon aan dat

$$\frac{\partial g}{\partial v}(u,v) = 0$$

en leid hieruit af dat er een C^1-functie $h : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ is zo dat $f(x,y) = h(xy^2)$.

Z.O.Z.

(vervolg tentamen)

3. (i)[4] Toon aan dat het stelsel vergelijkingen

$$x^2 + y^2 + 2xyuv = 1, \quad 2xy + u^2 + v^2 = 5,$$

in een omgeving van $(x, y, u, v) = (1, 0, 2, -1)$ de onbekenden x en y bepaalt als functies van u en v, zeg $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ en dat φ en ψ C^∞-functies zijn in een omgeving van $(2, -1)$.

(ii)[5] Bereken $\dfrac{\partial\varphi}{\partial v}(2, -1)$ en $\dfrac{\partial\psi}{\partial v}(2, -1)$.

4.[1,9] Bepaal met behulp van de Hessiaan, de multiplicatorenmethode van Lagrange en de stelling van Weierstrass de globale en locale extrema (als die er zijn) van

$$f(x, y) = (y^2 - 1)(x^2 - y^2 - 1)$$

op de cirkelschijf D: $x^2 + y^2 \leq 1$.

5.[1,9] Formuleer en bewijs de contractiestelling (ook wel dekpuntstelling genoemd) op een gesloten deelverzameling B van $\mathbb{R}^m$.